MODELIZACIÓN DEL RIESGO

DE CRÉDITO Y BIS II

First RiskLab International Conference

Madrid, 18 de Octubre

METODOLOGIA DE RIESGOS

Juan Carlos García Céspedes

Resumen de Contenidos

1-. El modelo de Merton

2-. El modelo de BIS II

3-. La distribución de “defaults” en BIS II

4-. La fórmula de capital en BIS II

5-. El impacto de la LGD

6-. La Correlación de activos: estimaciones

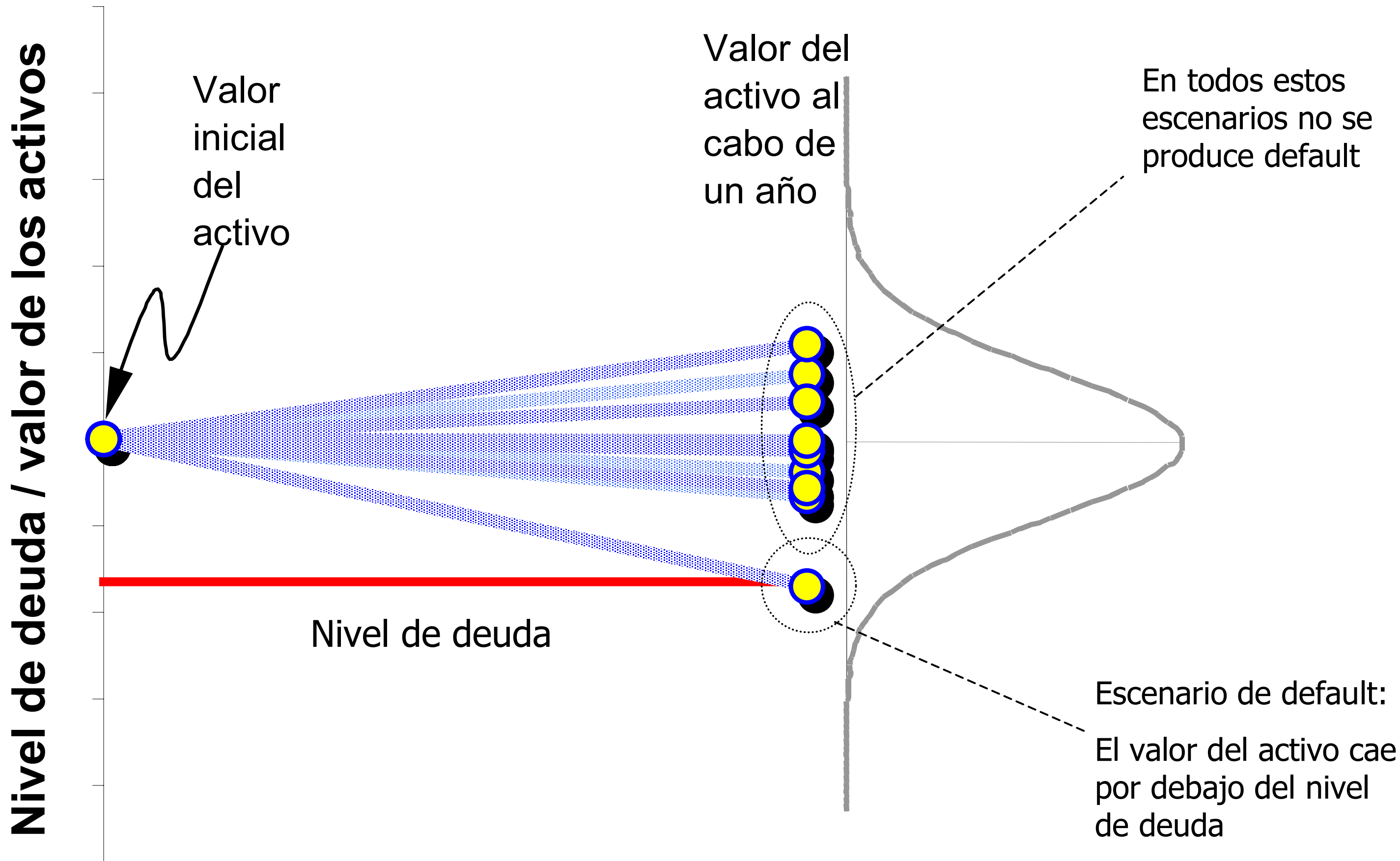
7-. Una extensión: modelo bifactorial

8-. Conclusiones

9-. Bibliografía y Anexos

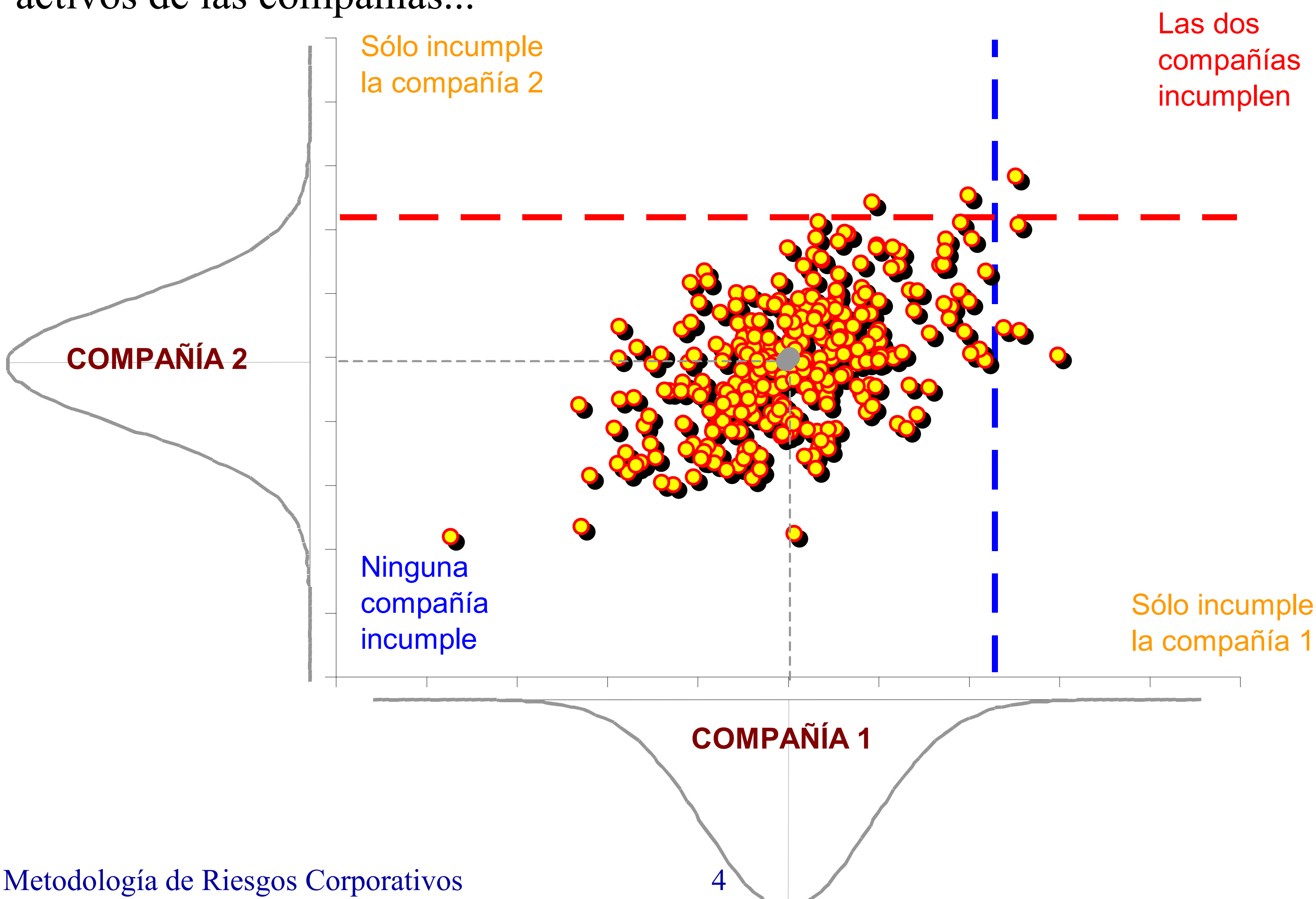
1-. El modelo de Merton de crédito

El default de una compañía se produce cuando el valor de sus activos cae por debajo del nivel de su deuda. Ni liquidando todos sus activos podría repagar la deuda.



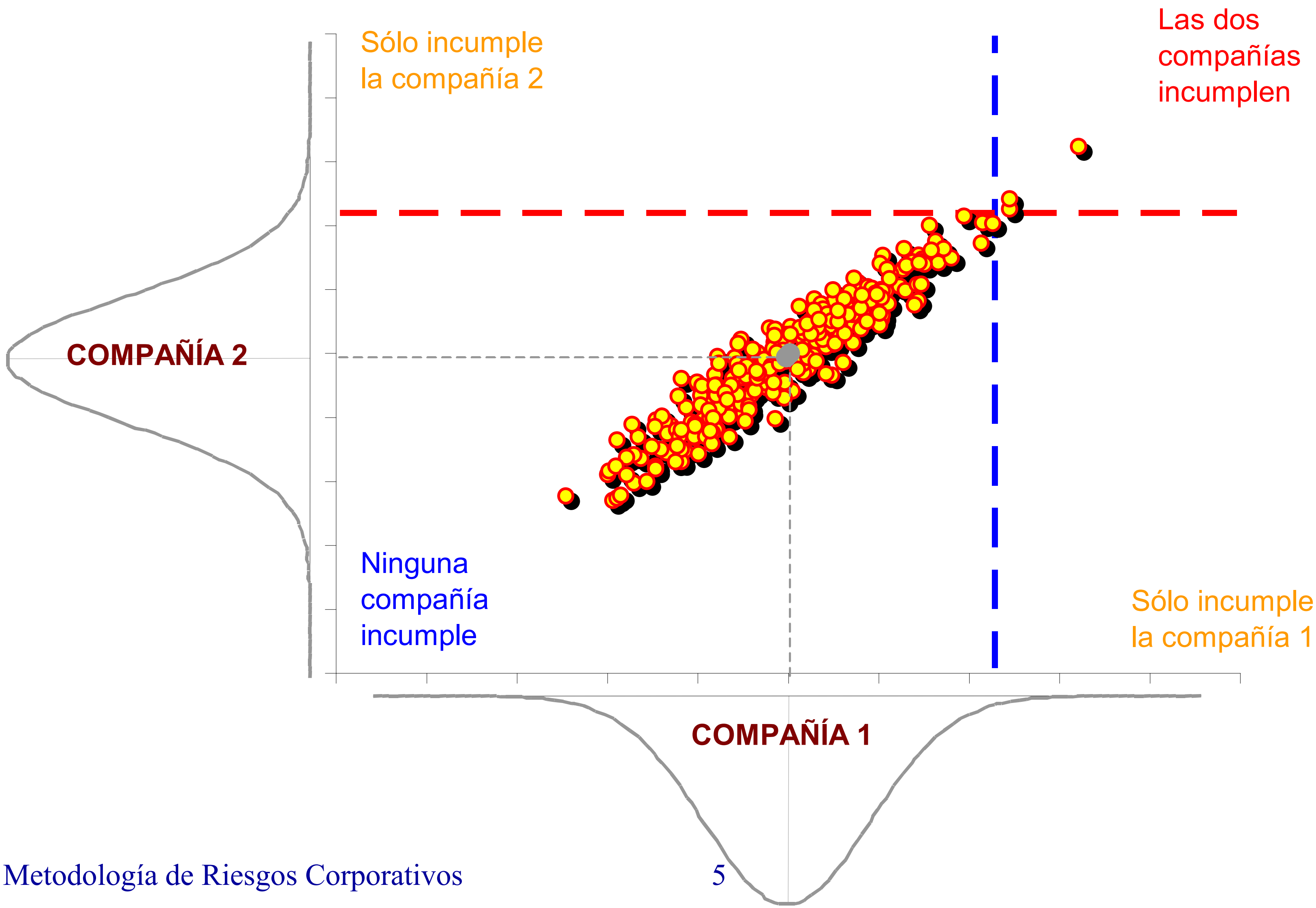
Es fácil visualizar el modelo de Merton para dos contrapartidas.

La correlación entre los defaults viene determinada por la correlación entre los activos de las compañías...



BBVA

Cuanto mayor es la correlación entre los activos de las compañías mayor es la probabilidad de default conjunto y mayor es por tanto la correlación entre los defaults.



2.-El modelo de BIS II

Es una aproximación inspirada en el “modelo de Merton” donde:

• El número de contrapartidas en el portfolio “n” tiende a infinito

• El tamaño de las exposiciones de todas las contrapartidas es igual a “1/n”, y por tanto tiende a cero.

• Todas las contrapartidas tienen igual probabilidad individual de incumplimiento, *p*.

• El valor de los activos de todas las compañías sigue un proceso gaussiano, i.i.d.:

$$V_i = \sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i$$

donde “f” es un factor común a todas las compañías (modelo unifactorial)

• La correlación entre los activos de todas las contrapartidas es igual a ρ

En este contexto, existe formula cerrada para la distribución de los defaults

La formula de la distribución acumulada de defaults es

$$F(x) = P[X \leq x] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)\right)\right)$$

Donde:

- $\Phi(\cdot)$ es la distribución normal estándar acumulada
- $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la distribución normal estándar inversa
- ρ es la correlación de activos
- p es la probabilidad individual de incumplimiento

Derivando la expresión anterior se obtiene la formula de la densidad de defaults:

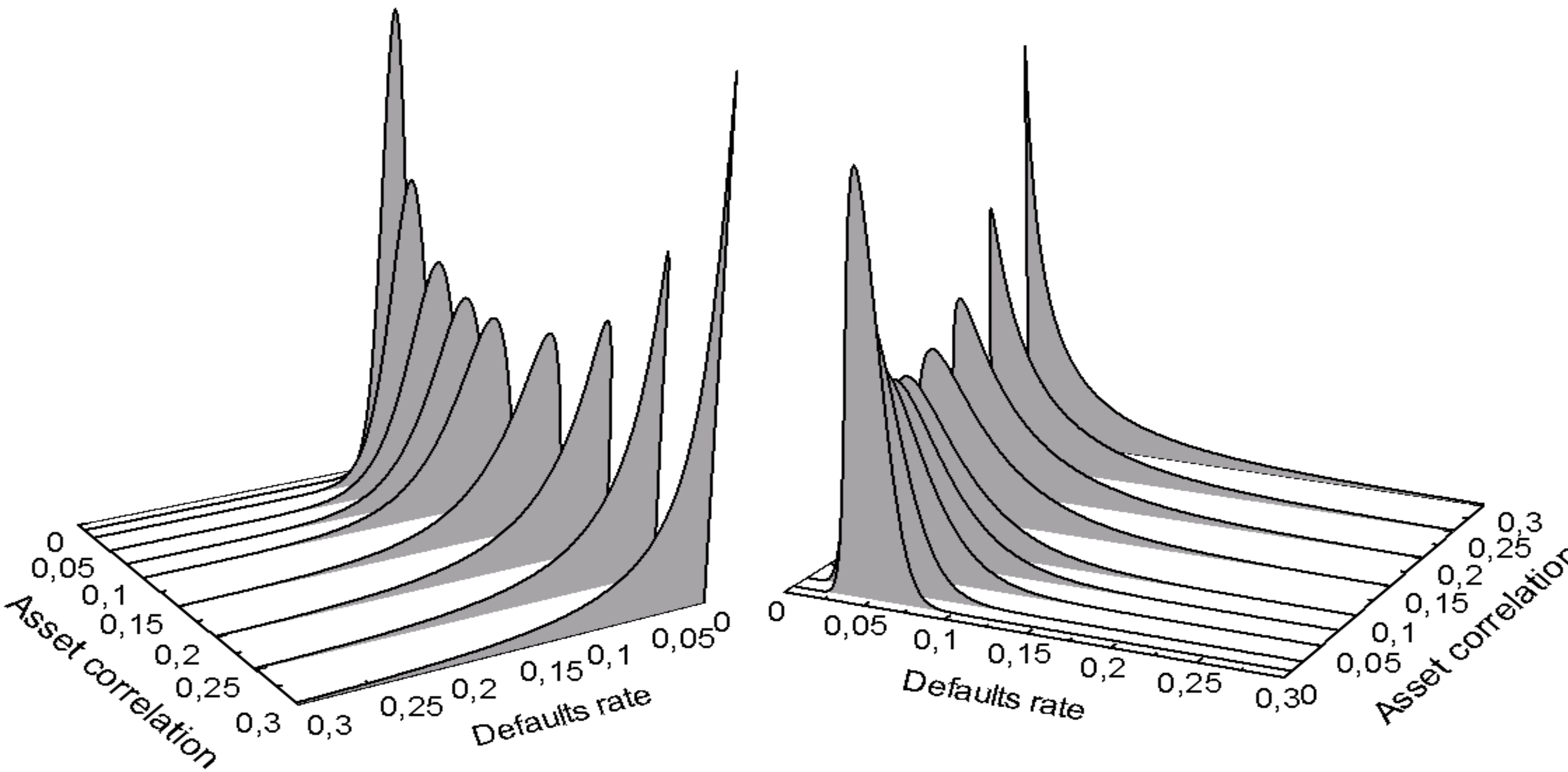
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\Phi^{-1}(x)\right)^2 - \frac{1}{2\cdot\rho}\left[\Phi^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x)\right]^2\right\}$$

El “truco” para llegar a las fórmulas anteriores estriba en condicionar los defaults a la realización del factor y utilizar la ley de las esperanzas iteradas.

3.-Distribución de defaults en el BIS II

Conforme la correlación de activos es mayor, la densidad de las pérdidas crediticias es más asimétrica y la cola mucho más gruesa.

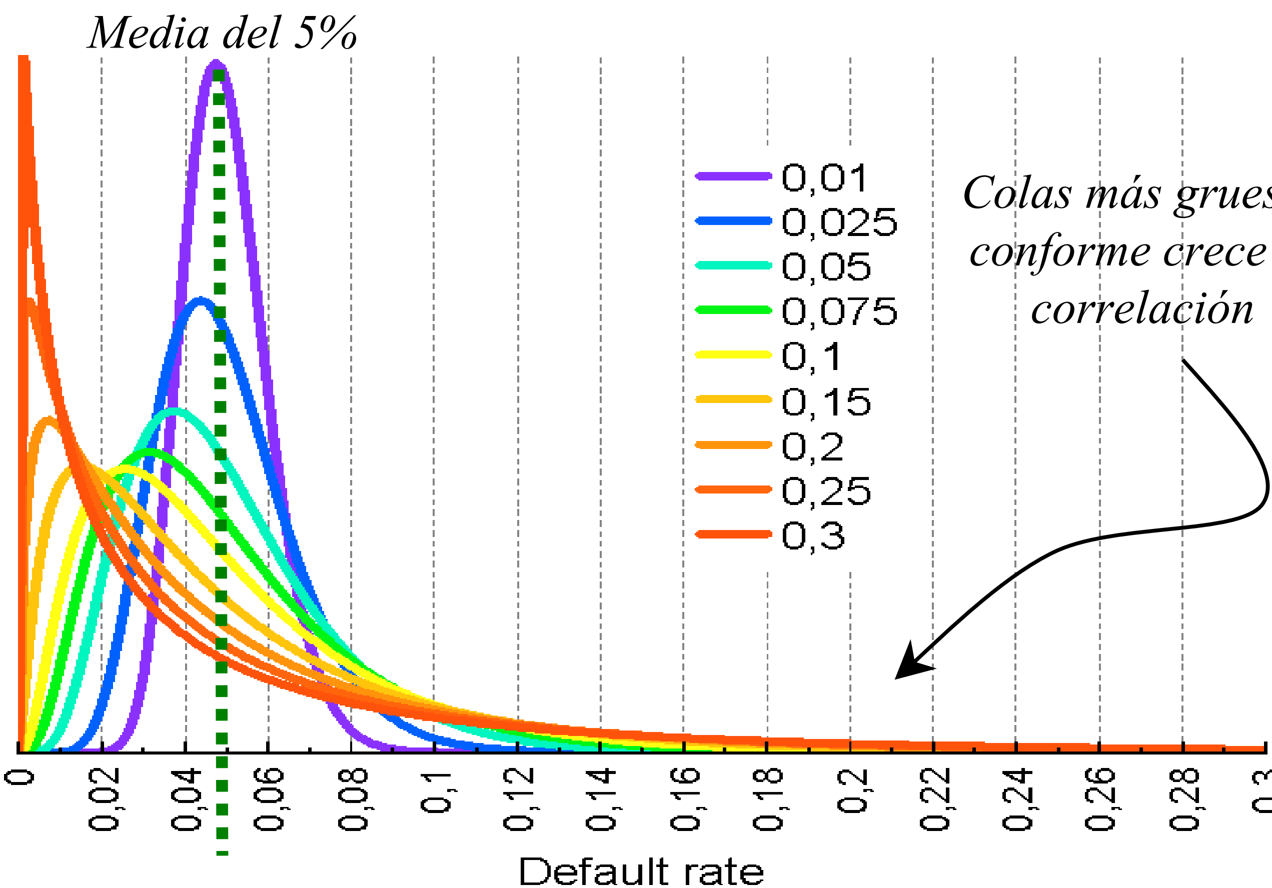
Las gráficas corresponden a una cartera con contrapartidas con PD del 5% y diferentes correlaciones de activos entre 1% y 30%.



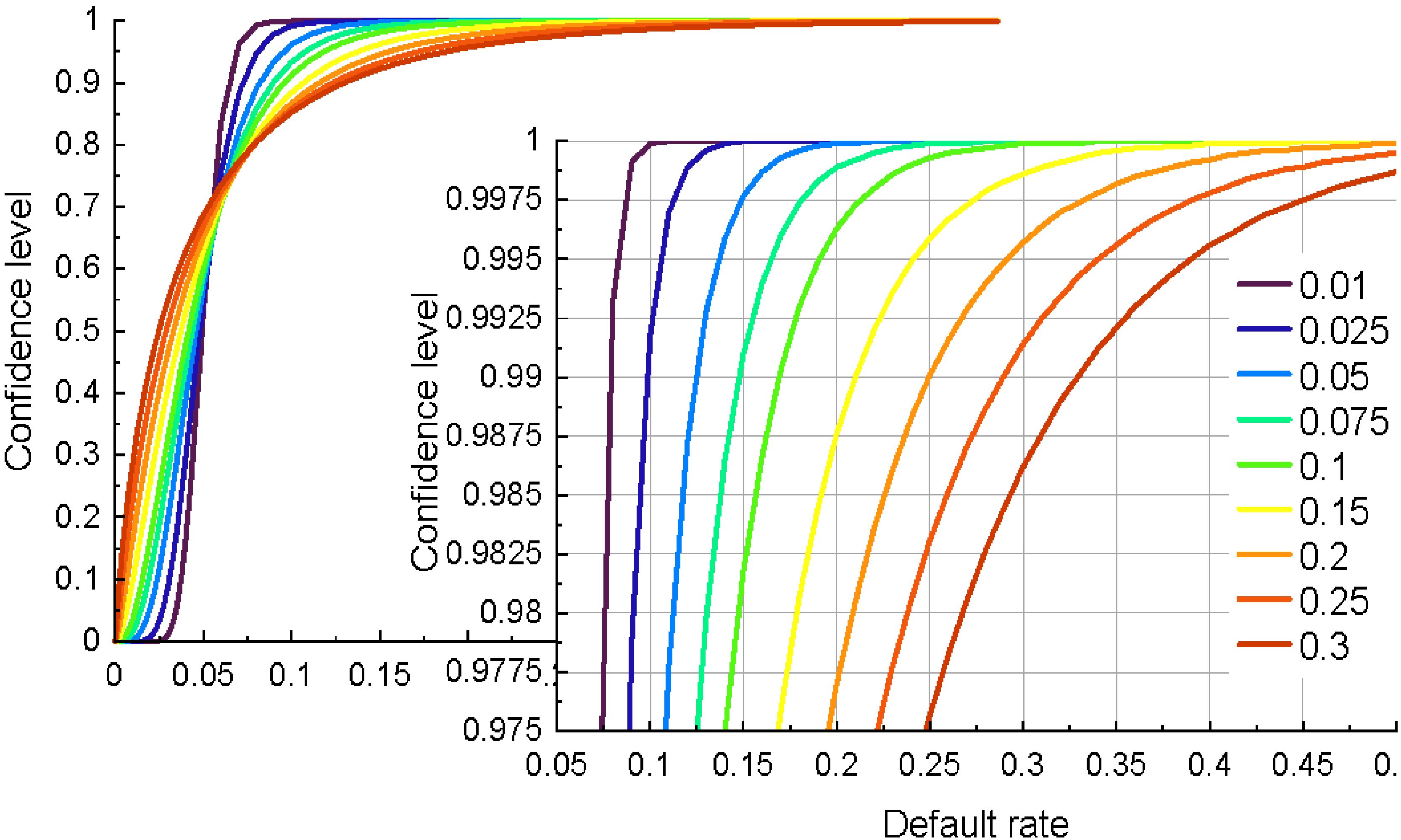
Se puede ver en un nuevo gráfico:

Todas las distribuciones tienen de media 5%, sin embargo la forma cambia en función de las correlaciones de activos

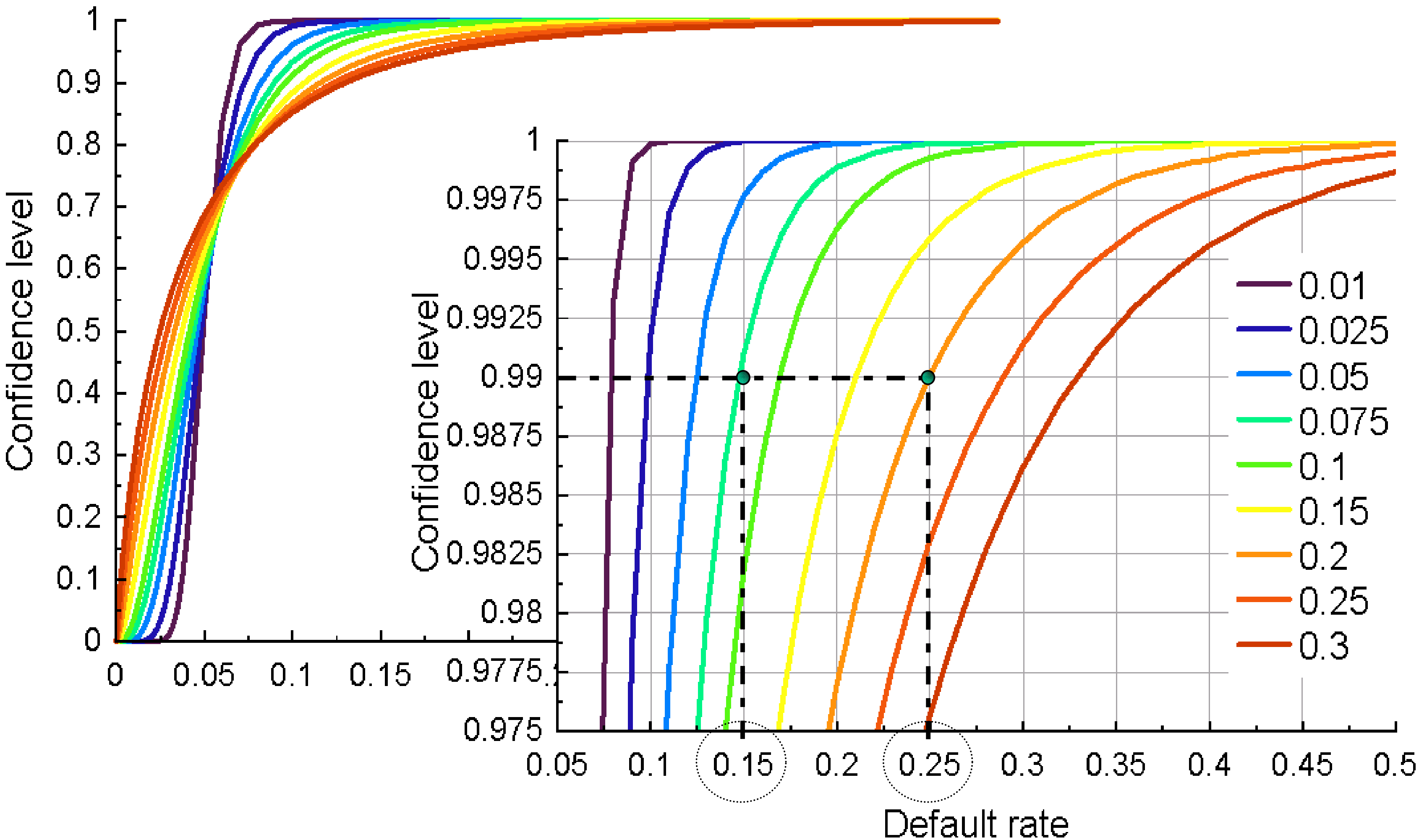
Las gráficas corresponden a una cartera con contrapartidas con PD del 5% y diferentes correlaciones de activos entre 1% y 30%.



La distribución acumulada mide el capital. El capital no es más que un determinado percentil de la distribución de defaults.

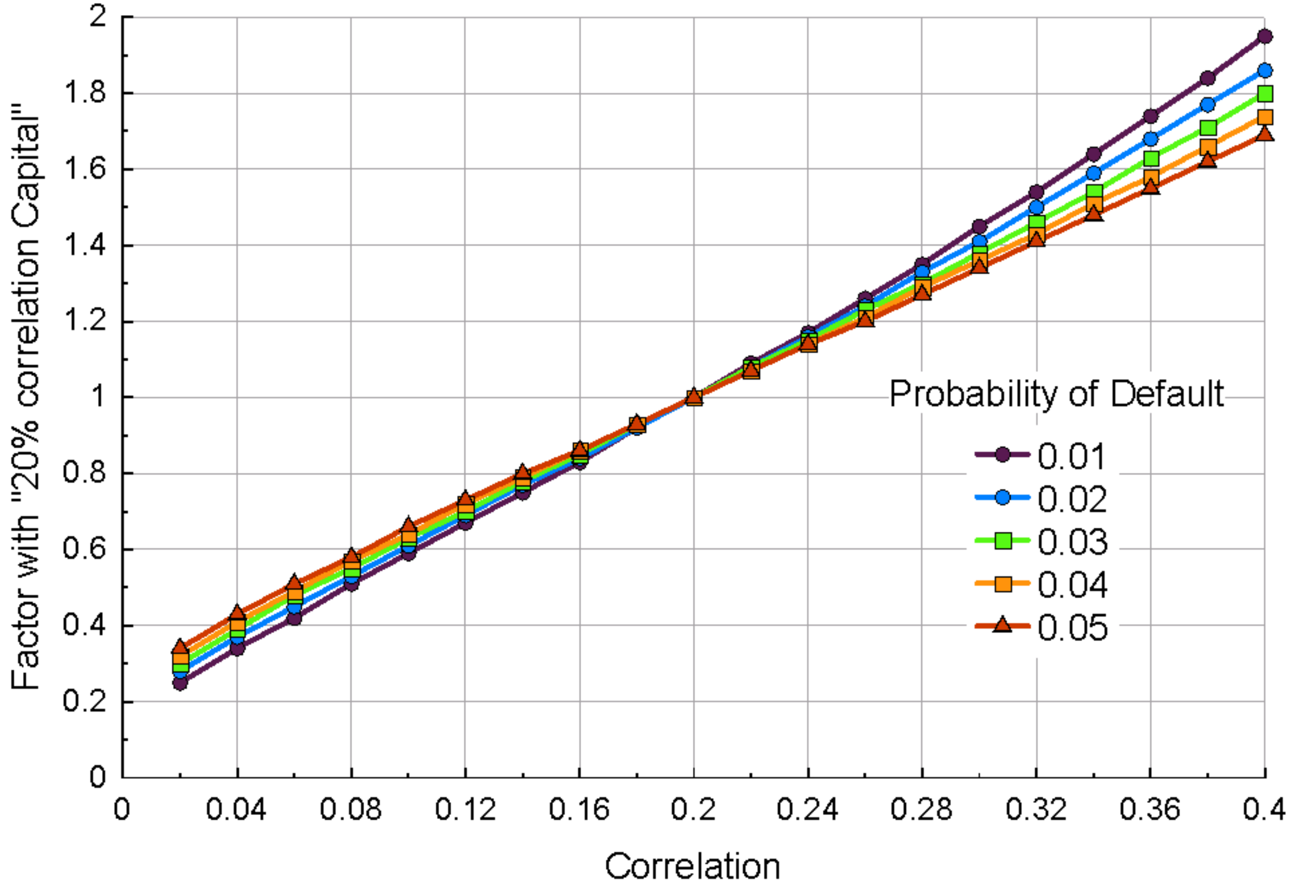


Por ejemplo, el percentil 99% con una correlación de activos del 7,5% implica una tasa de defaults del 15%, mientras que el mismo percentil para una correlación del 20% supone una tasa de defaults del 25%.



El impacto de la correlación en los percentiles de la distribución (y por tanto en el capital) es importante.

Por ejemplo pasar de una correlación del 20% al 8% prácticamente es dividir por 2 el percentil.



4.- La fórmula de Capital en BIS II

BIS II utiliza como base el modelo antes descrito, el capital se calcula para un nivel de confianza del 99,5%, con una correlación de activos del 20% y suponiendo que el "Loss Given Default" (LGD) es constante.

Adicionalmente, existen dos factores, uno que capta el efecto del plazo y otro que determina el anclaje, y que no serán objeto de análisis en esta presentación

$$Capital\ Regulatorio \propto LGD \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \Phi^{-1}(p) - \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\Phi^{-1}(Q)\right) =$$

$$= LGD \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{1-0.2}} \cdot \Phi^{-1}(p) - \sqrt{\frac{0.2}{1-.2}}\Phi^{-1}(.995)\right) =$$

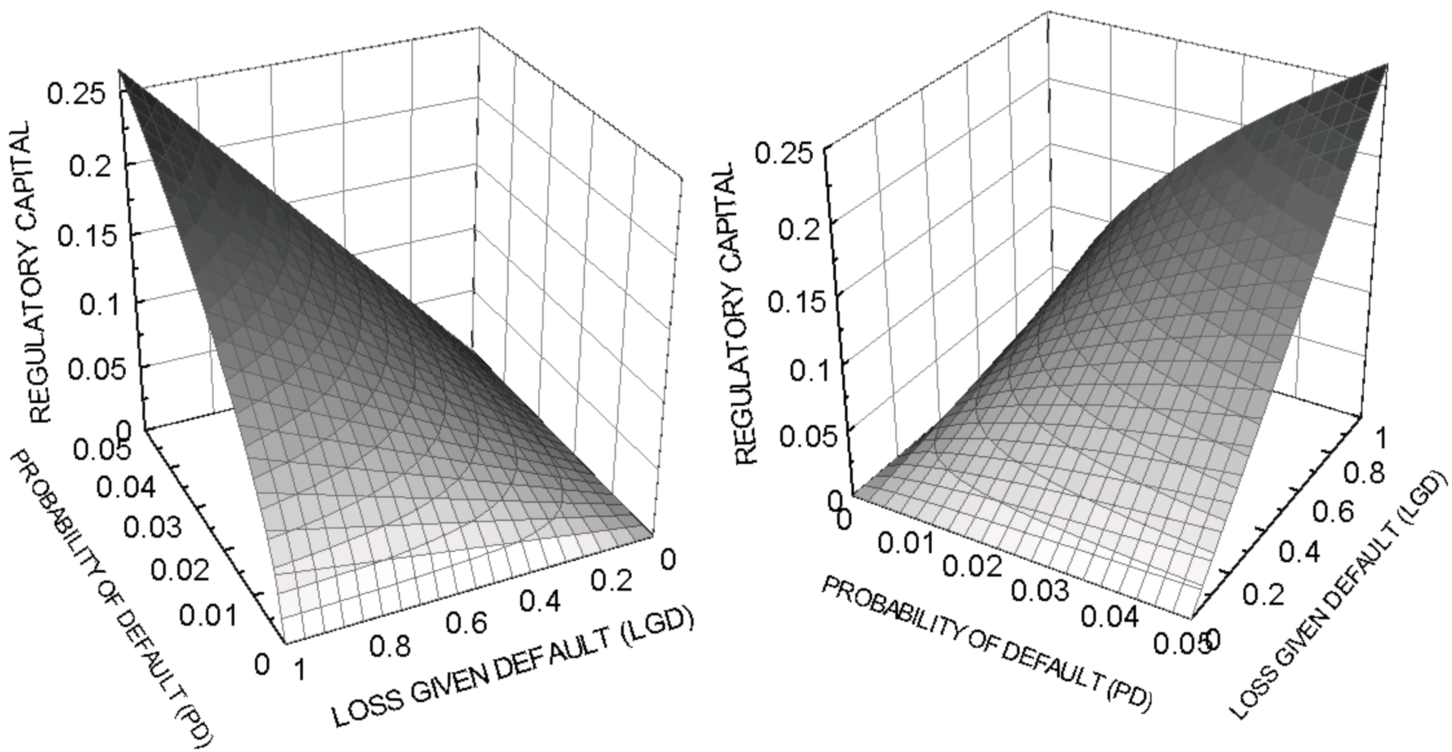
$$= LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right)$$

BBVA

5.- El impacto de la LGD

$$\text{Capital Regulatorio} \propto LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right)$$

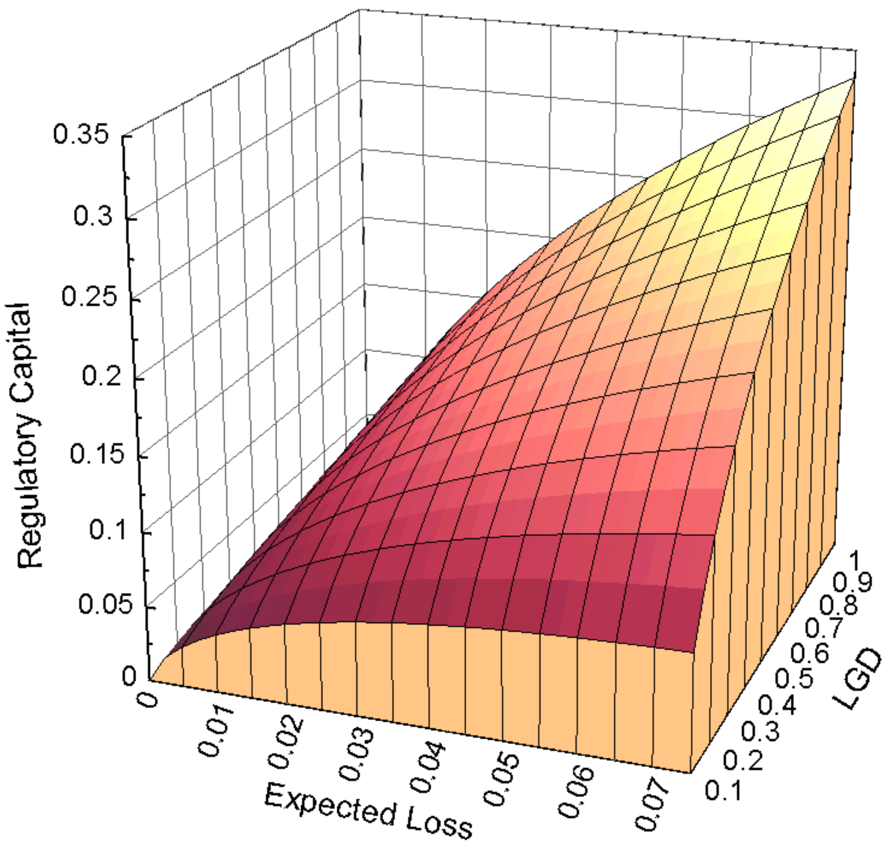
Si se representa la ecuación anterior se obtienen las figuras siguientes, este es el núcleo de la propuesta de BIS II:



BBVA

Es posible obtener la función de capital para distintos valores de LGD.

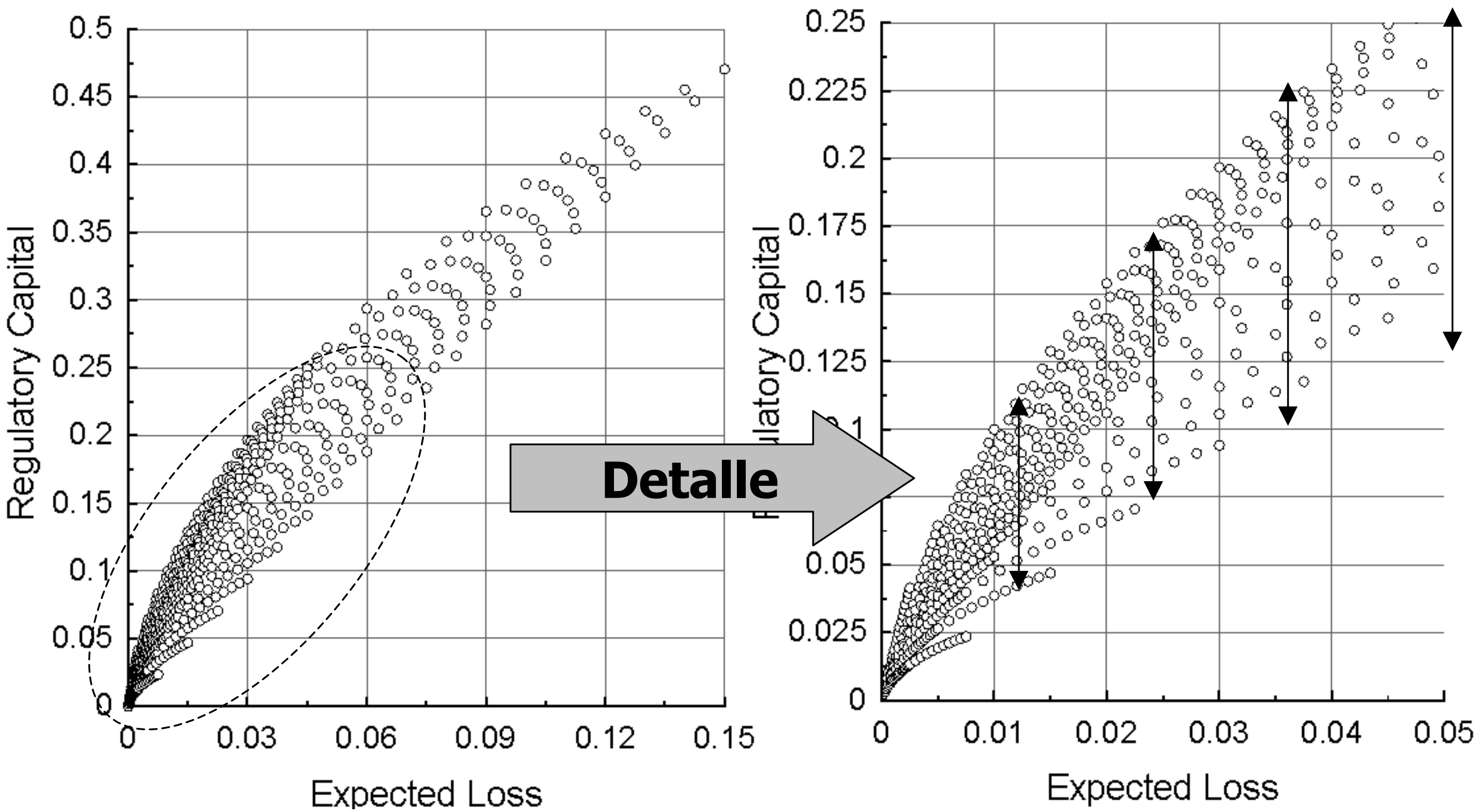
$$Capital\ Regulatorio = LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{EL}{LGD}\right) - 1.288\right)$$



BBVA

Una circunstancia interesante de BIS II es que dado que el capital, para un mismo nivel de pérdida esperada, pueda ser diferente, dependiendo del valor de la LGD A igual pérdida esperada, una menor LGD da lugar a menores requerimientos de capital.

$$\text{Capital Regulatorio} \propto LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right) = LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{EL}{LGD}\right) - 1.288\right)$$



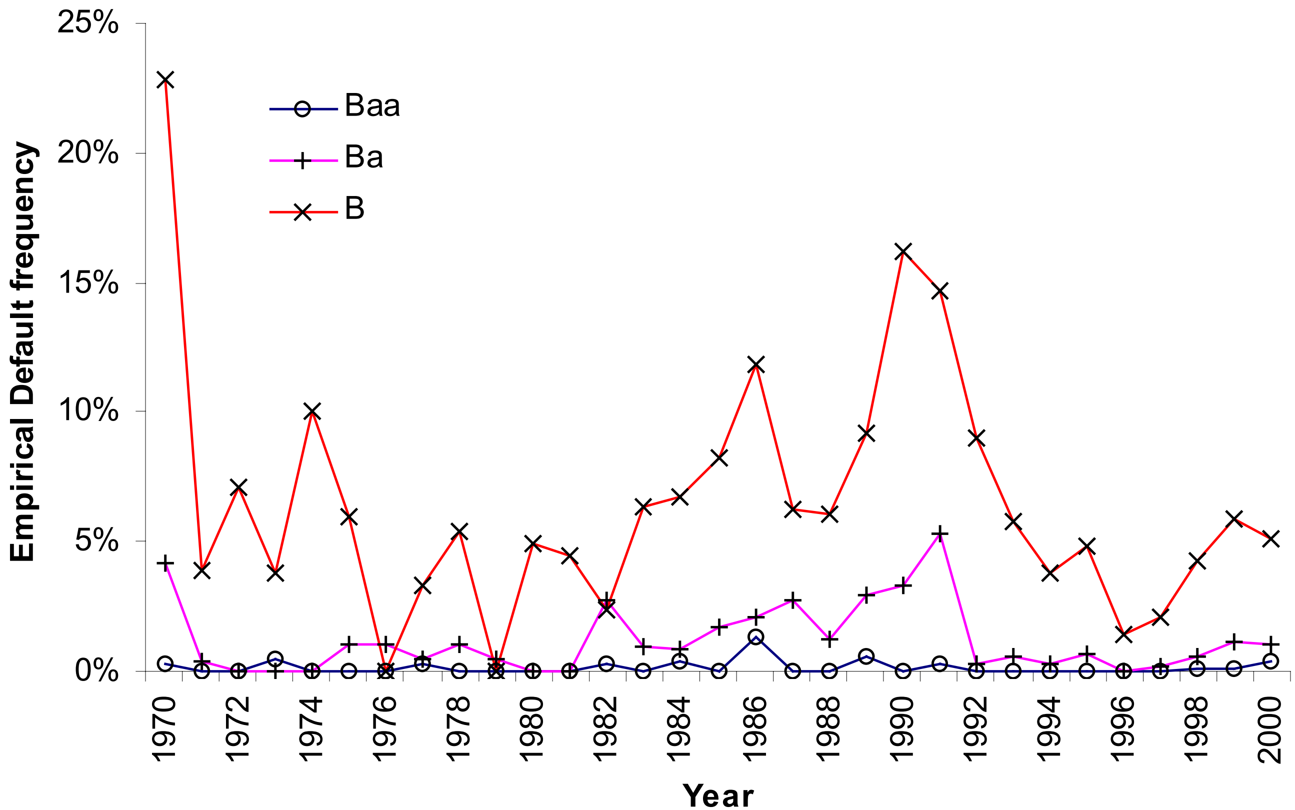
El modelo de Basilea II tiene (entre otros muchos) dos supuestos básicos que determinan en gran medida los requerimientos de capital:

- La correlación de activos: supuesto del 20% para empresas
- El supuesto de modelo unifactorial

Sería muy interesante determinar empíricamente la validez de dichos supuestos o al menos acotar su impacto en el consumo de capital.

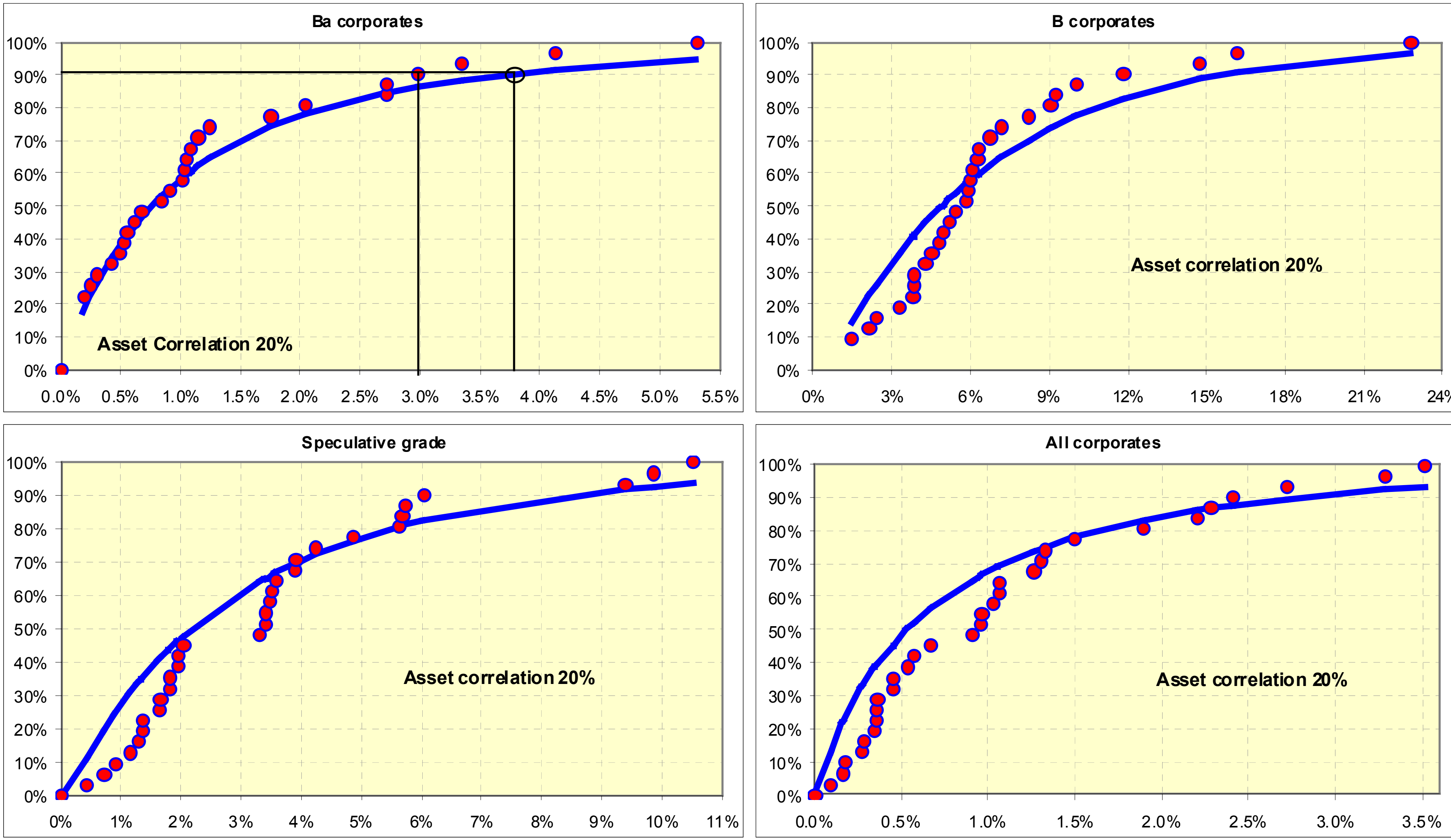
6-. La Correlación de activos: estimaciones

Es complicado contrastar empíricamente el supuesto de correlación implícito en la propuesta por Basilea dada la poca disponibilidad de datos. Sin embargo es posible hacer algún ejercicio utilizando datos de agencias de rating. El gráfico presenta las tasa de default desde 1970 hasta hoy para los grados Baa, Ba y B de Moodys.



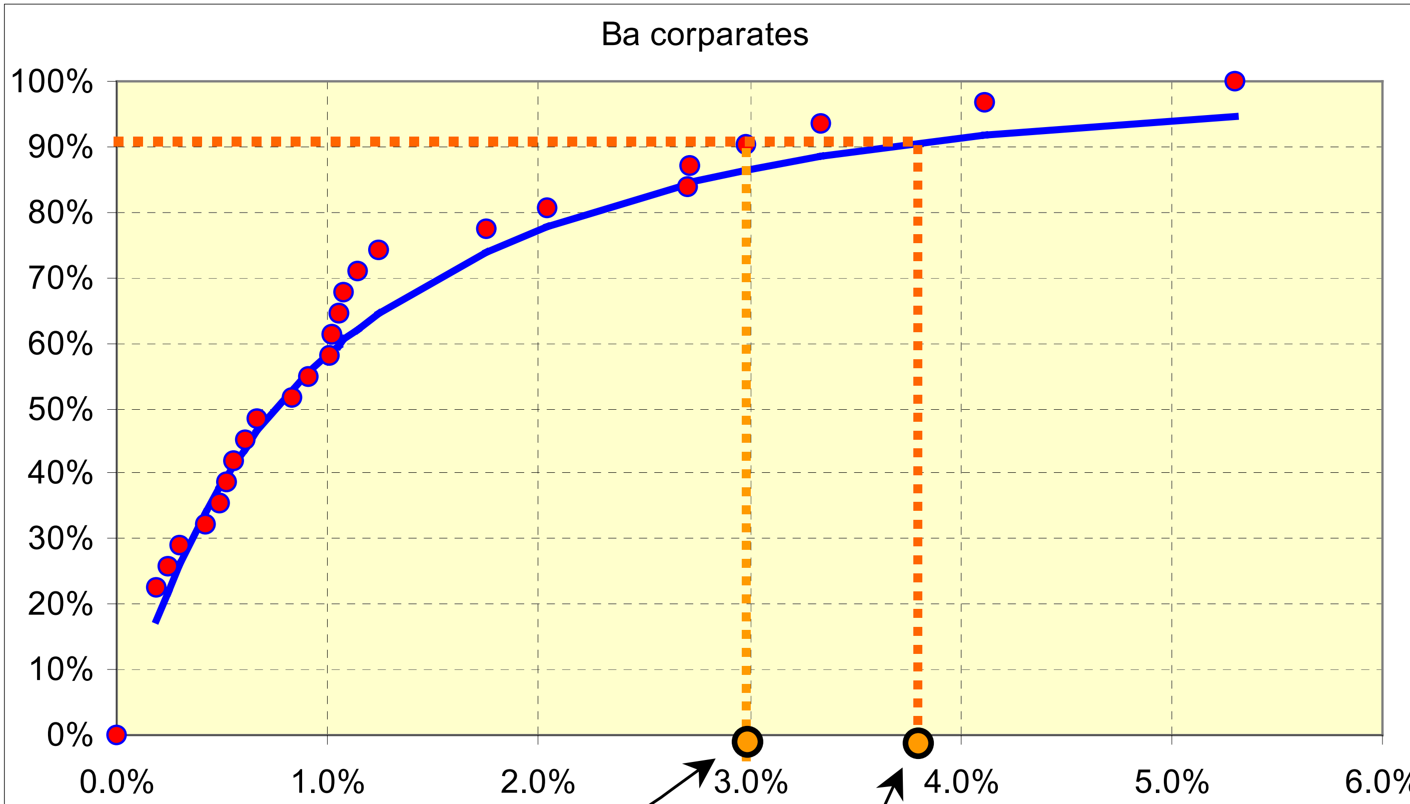
Se puede obtener la distribución acumulada empírica de defaults y compararla con la propuesta por Basilea

CDF for 20% asset correlation



BBVA

La **conclusión es que la distribución propuesta por Basilea sobreestima el riesgo**, en la realidad las tasas de default en las colas son menores.

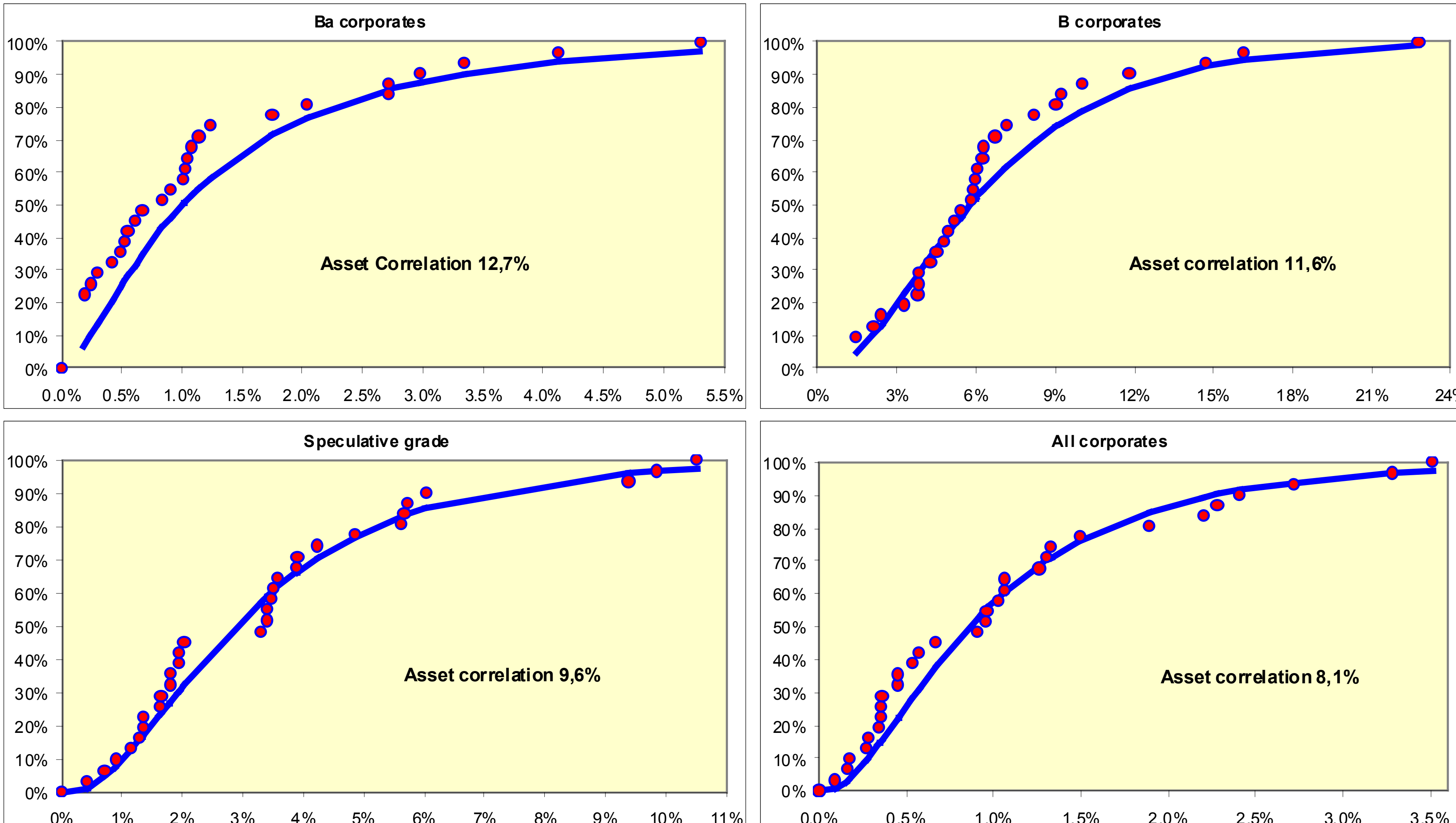


Defaults al 90% de confianza, distribución empírica

Defaults al 90% de confianza, distribución BIS II

Un ejercicio interesante es estimar la correlación de activos implcita en los datos empíricos. Dicha correlación está en el entorno al 10% frente al propuesto 20% de Basilea.

CDF for different asset correlations



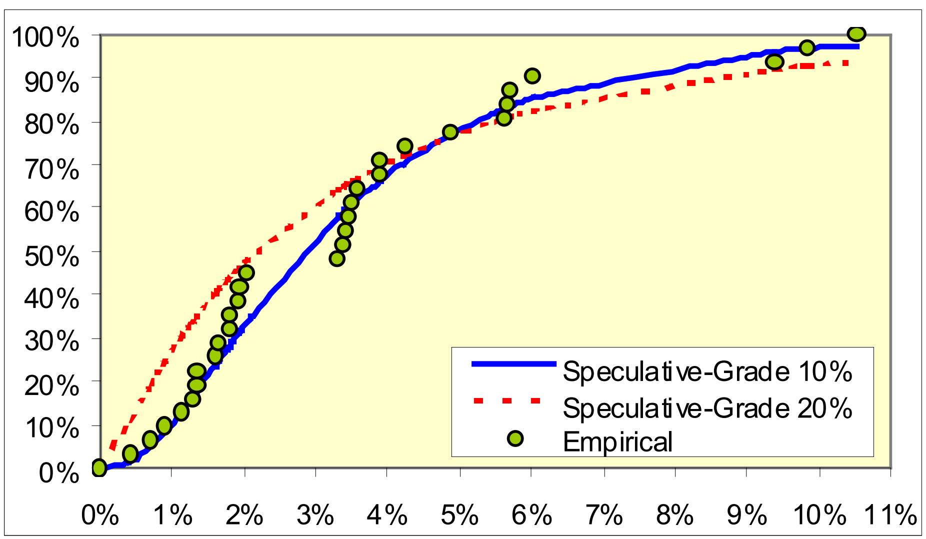
Los gráficos siguientes presentan:

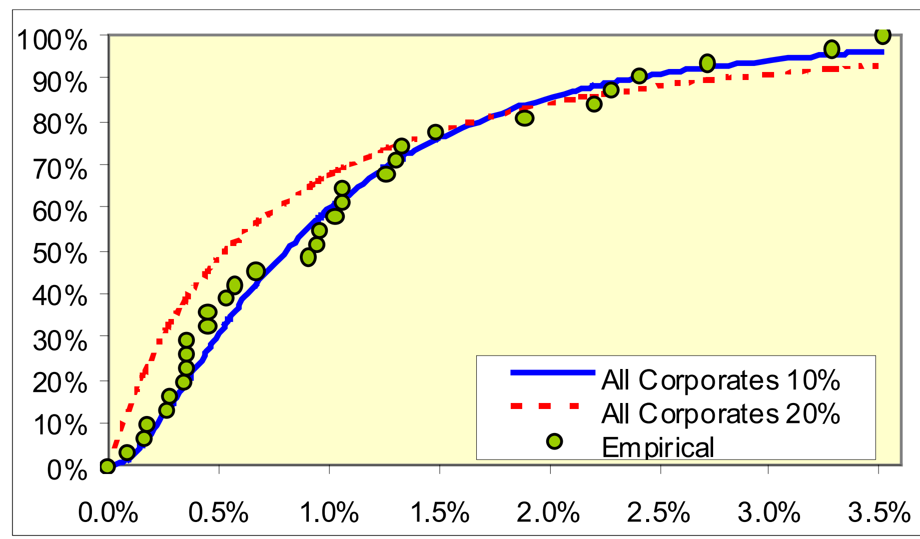
-las distribución acumulada empírica

-la propuesta por Basilea (con correlación del 20%)

- la curva que resultaría utilizando una correlación del 10%.

El ajuste con correlación del 10% es claramente mejor en todos los percentiles, incluidos los percentiles por encima del 80%.





7-. Una extensión: modelo bifactorial

En relación al uso de un modelo unifactorial y su impacto en el consumo de capital se ha desarrollado un modelo bifactorial para poder así estudiar las diferencias respecto del modelo unifactorial.

Para visualizar el modelo se puede pensar en los siguientes términos:

- Se supone que existen dos economías-países, cada una de ellas dirigida por un único factor, e interrelacionadas a través de la correlación entre dichos factores (para visualizar el modelo, podría pensarse que el factor fuese el PIB de cada una de las economías-países).

- Existen dos tipos de empresas, de manera que el valor de los activos que toma cada una de las empresas depende del factor (de nuevo piénsese en el PIB) específico de la economía-país a la que pertenece

En la economía existen, por tanto, dos tipos de contrapartidas (una por cada economía-país):

- Las contrapartidas de tipo 1, todas con igual probabilidad de incumplimiento p_1 e igual correlación de activos ρ_1. .El valor de sus activos está afectado sólo por el factor 1 (f_1).

- Las contrapartidas de tipo 2, todas con igual probabilidad de incumplimiento p_2 e igual correlación de activos ρ_2,. El valor de sus activos está afectado sólo por el factor 2 (f_2).

Relación entre factores

$$f_2 = \rho_F \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_F^2} \cdot \zeta$$

$$\rho_F = corr(f_1, f_2)$$

Valor de las empresas

$$V_1^i = \sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1^i \qquad V_2^j = \sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2^j$$

La distribución de defaults en este contexto no tiene solución analítica como en el caso unifactorial

Es necesario resolver la doble integral siguiente.

$$F(x) = \iint_{\Omega} \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2$$

$$\Omega = \{(y_1, y_2)\} \quad s.a. \quad n_1 \cdot \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot y_1}{\sqrt{1-\rho_1}}\right) + n_2 \cdot \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot y_2}{\sqrt{1-\rho_2}}\right) \leq x$$

Dicha integral se puede resolver mediante métodos numéricos.

A fin de ver con números el impacto de utilizar un modelo unifactorial versus otro bifactorial, se han realizado algunas simulaciones para las que se ha supuesto:

- p_1: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 1 (contrapartidas de tipo 1): 1%
- p_2: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 2 (contrapartidas de tipo 2): 3%
- n_1: Porcentaje de contrapartidas de tipo 1: varía entre 0% y 100%
- $n_2 = 1 - n_1$: porcentaje de contrapartidas de tipo 2: varía entre 0% y 100%
- ρ_1: Correlación de activos de las contrapartidas de tipo 1: 20% (*)
- ρ_2: correlación de activos de las contrapartidas de tipo2: 20% (*)
- ρ_f: Correlación entre el factor 1 y el factor 2: varía entre 0% y 100%

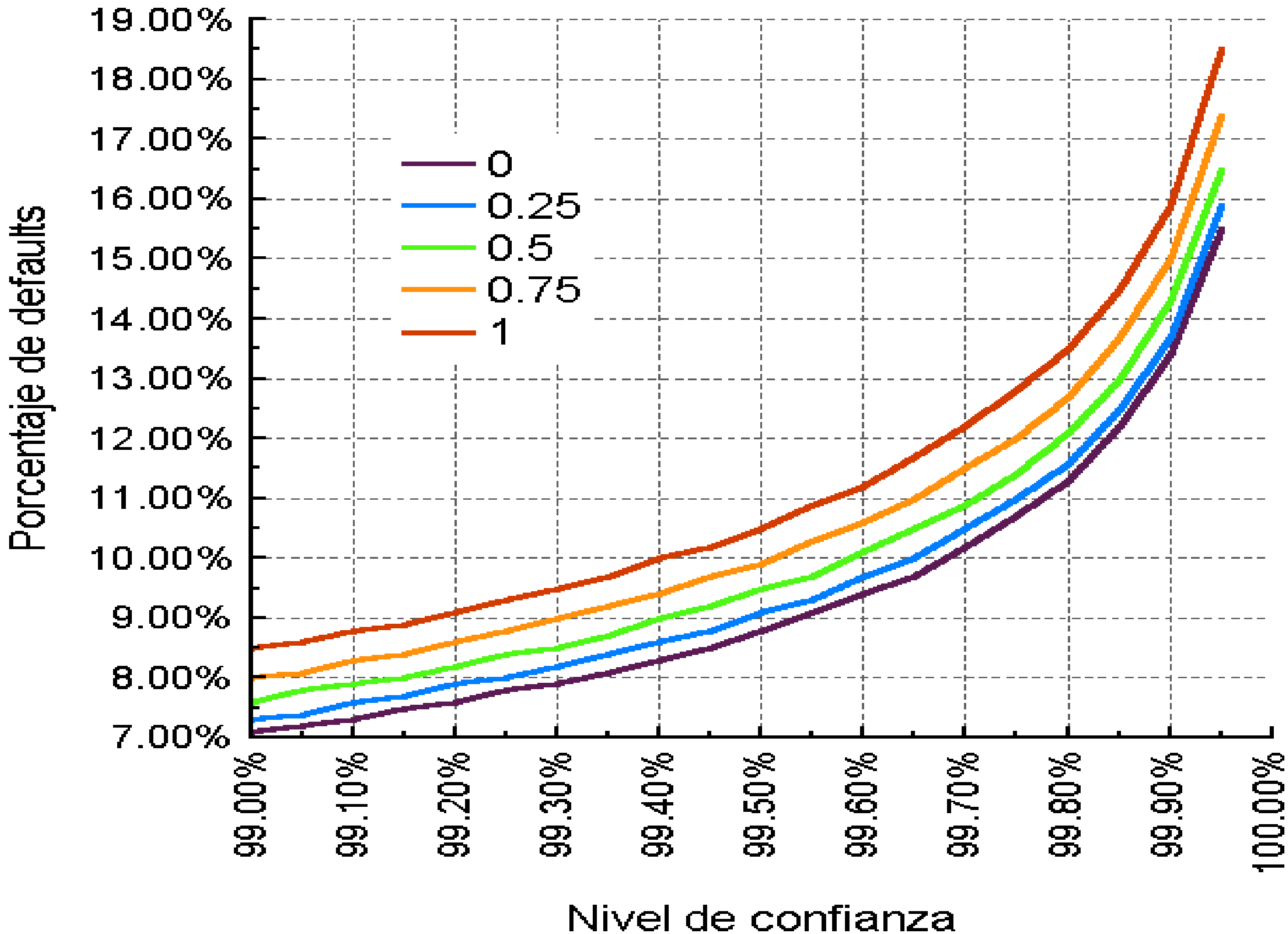
(*) Para ser consistentes con el supuesto de BISII

Primera simulación: sensibilidad a la correlación entre los factores

- p_1: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 1 (contrapartidas de tipo 1): 1%
- p_2: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 2 (contrapartidas de tipo 2): 3%
- n_1: Porcentaje de contrapartidas de tipo 1: 90%
- n_2: porcentaje de contrapartidas de tipo 2 : 10%
- ρ_1: Correlación de activos de las contrapartidas de tipo 1: 20%
- ρ_2: correlación de activos de las contrapartidas de tipo2: 20%
- ρ_f: Correlación entre el factor 1 y el factor 2: ***varía entre 0% y 100%***

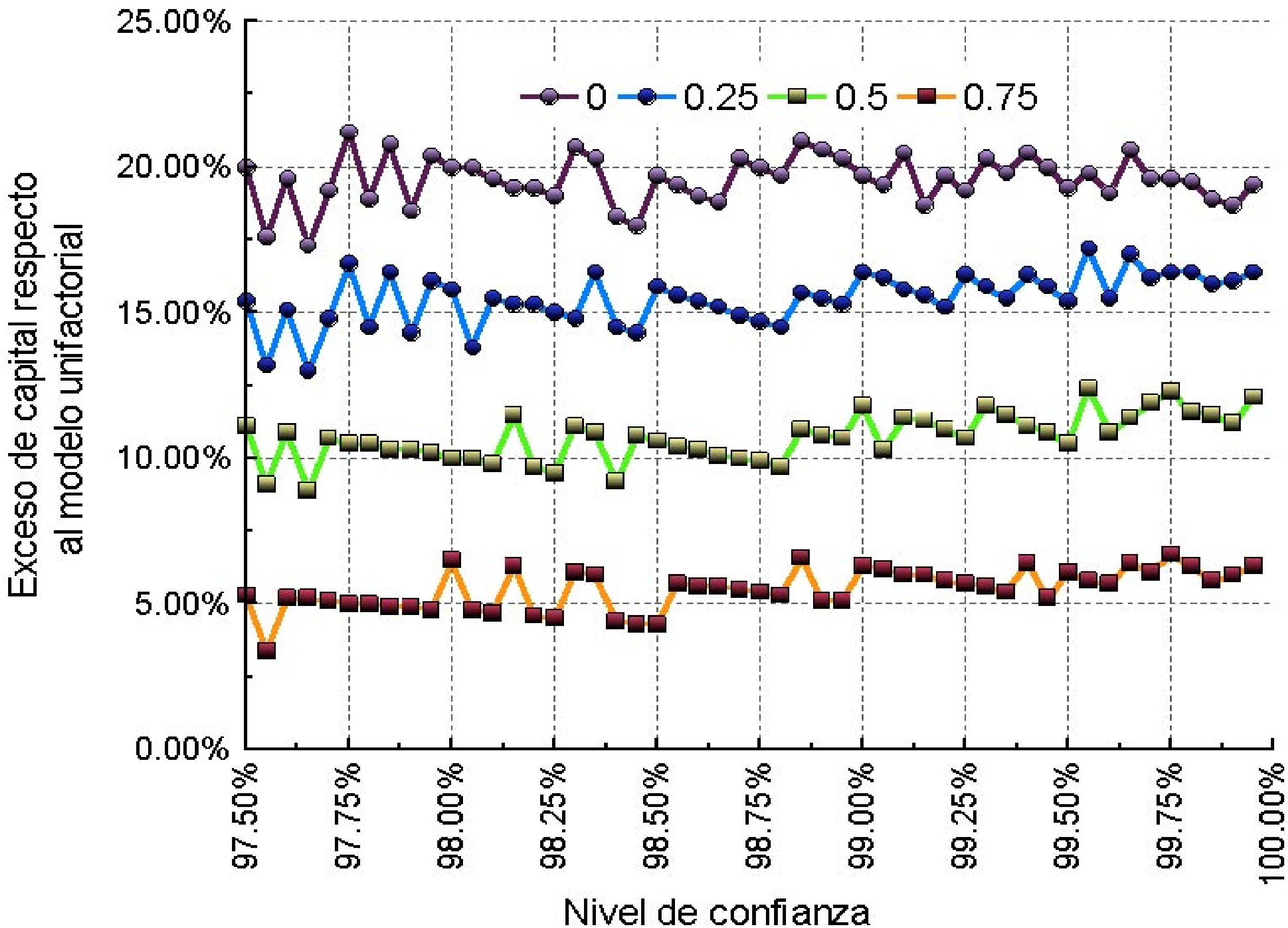
Un banco ha incorporado a su cartera un 10% de préstamos, en un nuevo país, con mayor PD. ¿Cuál es el impacto en su capital económico? ¿y regulatorio?

El gráfico adjunto presenta las colas de la distribución de defaults de la cartera para 5 niveles diferentes de correlación entre los dos factores (países)



BBVA

Se puede comparar, para cada nivel de confianza y la cartera antes descrita, el incremento porcentual de consumo de capital que supone asumir el modelo unifactorial respecto a otro bifactorial con diferentes grados de correlación entre factores.

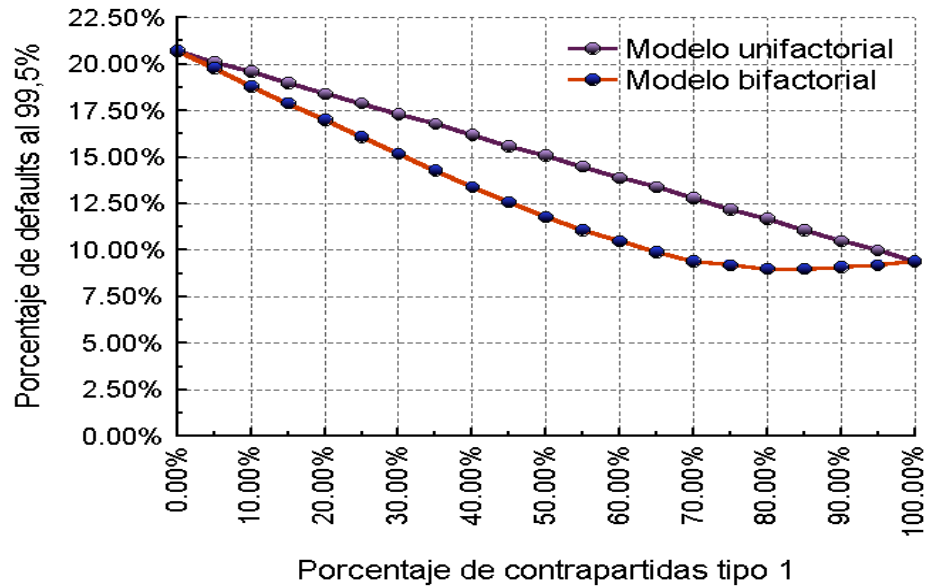


Segunda simulación: sensibilidad a la estructura de la cartera

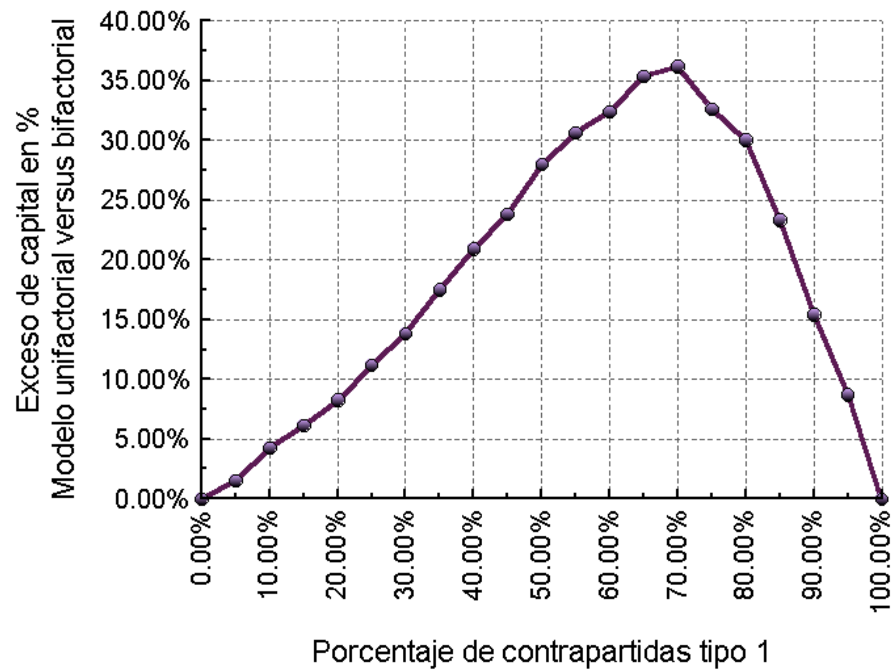
- p_1: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 1 (contrapartidas de tipo 1): 1%
- p_2: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 2 (contrapartidas de tipo 2): 3%
- n_1: Porcentaje de contrapartidas de tipo 1: ***varía entre 0 y 100%***
- n_2: porcentaje de contrapartidas de tipo 2 : ***varía en función de n_1***
- ρ_1: Correlación de activos de las contrapartidas de tipo 1: 20%
- ρ_2: correlación de activos de las contrapartidas de tipo2: 20%
- ρ_f: Correlación entre el factor 1 y el factor 2: 25%

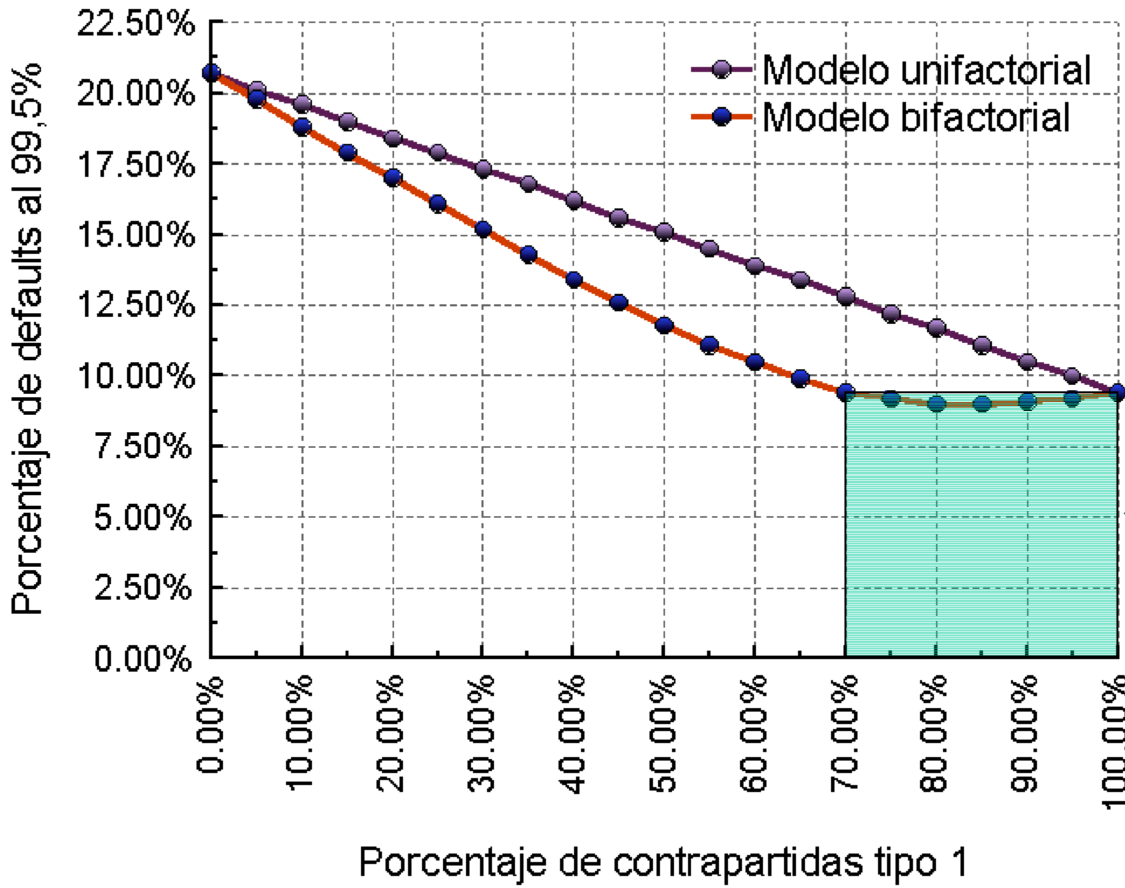
Un banco está pensando en incorporar a su cartera préstamos, en un nuevo país, con mayor PD y baja correlación. ¿Cuántos préstamos debería incorporar? ¿De nuevo, qué impacto tendrá esto en el capital económico y regulatorio?

La línea roja mide el percentil 99,5% para diferentes combinaciones de porcentajes de préstamos tipo 1 y 2 considerando una correlación entre factores del 25%. La línea morada es el caso unifactorial (que es igual que suponer una correlación de factores del 100%)...



El gráfico inferior mide el "exceso" de capital del modelo unifactorial respecto del modelo bifactorial con correlación entre factores del 25%

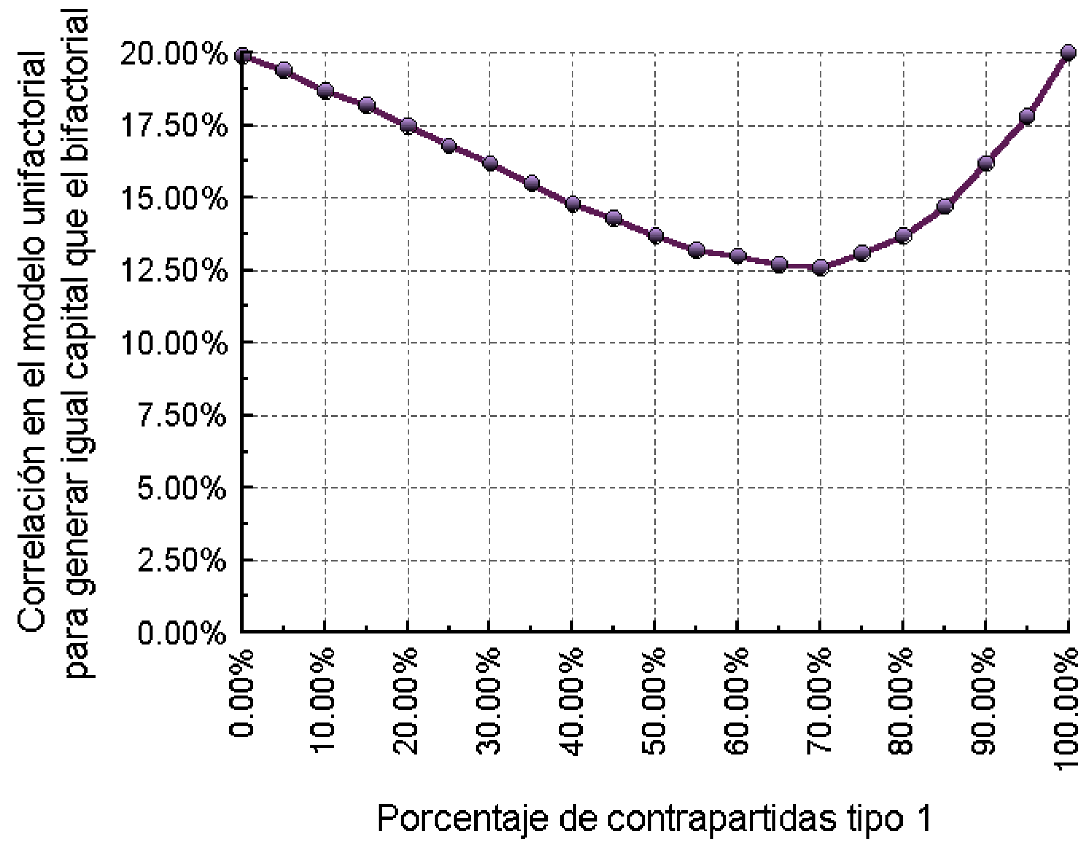




Añadir préstamos de peor calidad incluso reduce el capital requerido

En el modelo unifactorial, añadir a la cartera con préstamos de PD 1% otros préstamos con PD superior (3%) siempre incrementa las necesidades de capital. Sin embargo, en el modelo bifactorial añadir préstamos con PD del 3% (en cantidades razonables, inferiores a un 30%) incluso disminuye ligeramente las necesidades de capital debido al efecto de diversificación.

Resulta interesante determinar cuál es el nivel de correlación que bajo el modelo unifactorial genera las mismas necesidades de capital que el modelo bifactorial con correlación de factores del 25%.



Existen combinaciones de cartera que reducirían el nivel de correlación "implícita" hasta el 12.50% . Estos resultados están en línea con los obtenidos del análisis empírico de los defaults históricos (Moody's)

8.- Conclusiones (I)

Modelo BIS II: Consiste básicamente en la aplicación del modelo de Merton a una cartera con infinitas contrapartidas "iguales" dentro de una economía unifactorial. Este caso admite una solución analítica..

Tratamiento de la LGD: En el modelo BIS II la LGD no es aleatoria, es un parámetro constante, esto deriva en que la LGD afecta al capital de manera proporcional y se puede convertir en un factor crítico en el modelo.

Parametrizacion conservadora. En el caso de empresas, el parámetro de correlación elegido por Basilea es del 20%. Análisis empíricos sobre muestras históricas de defaults inducen a pensar que la correlación es del orden de la mitad (10%).

8.- Conclusiones (II)

<u>Es posible extender el modelo de BIS II al caso de economías n-factoriales si bien a costa de perder la solución analítica a la distribución de defaults</u>.

Un ejemplo interesante es el caso de un modelo bifactorial (se puede interpretar como el caso de inversiones en dos economías-países unifactoriales que tienen entre si un cierto grado de correlación).

En este contexto el uso del modelo propuesto por BIS II:

- Es conservador y desincentiva la diversificación
- Para paliar estos problemas dentro del modelo unifactorial una posible solución sería modificar, a la baja, el supuesto de correlación.

9.- Bibliografía

•Factor Models for portfolio credit risk. Philipp J. Schönbucher.

•The New Basel Capital Accord. www.bis.org

•An Analytic Approach to Credit Risk of Large Corporate Bond and Loan Portfolios. Andre Lucas, Pieter Klaassen, Peter Spreij, and Stefan Straetmans

•Default and Recovery Rates of CorporateBond Issuers: 2000. Moody's Investors Service.

•Modelling Dependencies in Credit Risk Management. Diploma Thesis of Mark A. Nyfeler. Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

•Portfolio Management of Default Risk. KMV Corporation

ANEXO I

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE DEFAULTS PARA EL CASO UNIFACTORIAL

Derivación de la distribución de defaults en un modelo unifactorial (I)

El valor de los activos de la empresa "i" está "dirigido" por un factor común *f*

$$V_i = \sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i$$

Existe una relación entre la probabilidad de incumplimiento de la empresa "i" y la barrera de default K_i.

$$p_i = P(V_i \leq K_i) = \Phi(K_i) \rightarrow K_i = \Phi^{-1}(p_i)$$

Es posible calcular la probabilidad de default condicionada a la realización del factor f.

$$p_i(y) = P[V_i(T) < K_i \mid f = y] = P\left[\sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i < K_i \mid f = y\right] =$$

$$= P\left[\xi_i < \frac{K_i - \sqrt{\rho} \cdot f}{\sqrt{1-\rho}} \mid f = y\right] = \Phi\left(\frac{K_i - \sqrt{\rho} \cdot y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Condicionando a la realización del factor f, los defaults de la cartera son variables independientes. Aplicando la ley de los grandes números se puede afirmar que con probabilidad 1 la tasa de defaults será igual a la probabilidad condicionada de default

$$P[X = p(y) \mid Y = y] = 1$$

BBVA

Derivación de la distribución de defaults en un modelo unifactorial (II)

Aplicando la ley de las esperanzas iteradas se tiene...

$$P[X \le x] = E[P[X \le x \mid Y]]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P[X \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p(y) \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy$$

La integral anterior se puede resolver analíticamente

$$P[X \le x] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p(y) \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy =$$
$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(K-\sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x)\right)} 0 \cdot \phi(y) \cdot dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(K-\sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x)\right)}^{\infty} 1 \cdot \phi(y) \cdot dy =$$
$$1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left(K - \sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x)\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left(\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x)\right) - K\right)$$

Así se obtiene la función de distribución acumulada

$$F(x) = P[X \le x] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)\right)\right)$$

ANEXO II

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE DEFAULTS PARA EL CASO BIFACTORIAL

Derivación de la distribución de defaults en un modelo bifactorial (I)

El valor de los activos de las empresas están "dirigidos" por dos factores correlacionados

$$\rho_F = corr(f_1, f_2)$$

$$V_1^i = \sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1^i$$

$$V_2^j = \sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2^j$$

Es posible calcular la probabilidad de default condicionada a la realización de los dos factores f_1 y f_2.

$$\begin{aligned} p_1(y_1) &= \\ &= P\left[V_1 < K_1 \mid f_1 = y_1\right] = \\ &= P\left[\sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1 < K_1 \mid f_1 = y_1\right] = \\ &= P\left[\xi_1 < \frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot f_1}{\sqrt{1-\rho_1}} \mid f_1 = y_1\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot y_1}{\sqrt{1-\rho_1}}\right) = \Phi_1(\cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(y_2) &= \\ &= P\left[V_2 < K_2 \mid f_2 = y_2\right] = \\ &= P\left[\sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2 < K_2 \mid f_2 = y_2\right] = \\ &= P\left[\xi_2 < \frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot f_2}{\sqrt{1-\rho_2}} \mid f_2 = y_2\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot y_2}{\sqrt{1-\rho_2}}\right) = \Phi_2(\cdot) \end{aligned}$$

Derivación de la distribución de defaults en un modelo bifactorial (II)

Condicionando en este caso a la realización de ambos factores, los defaults de la cartera son variables independientes, y de nuevo se aplica la ley de los grandes números...

$$P\left[X = n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\right] = 1$$

De nuevo aplicando la ley de las esperanzas iteradas...

$$\begin{aligned} P[X \le x] &= E\left[P\left[X \le x \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\right]\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P\left[X \le x \mid y_1, y_2\right] \cdot \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P\left[X = n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \le x \mid Y = y\right] \cdot \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \end{aligned}$$

En este caso la integral anterior se resuelve numéricamente

$$P[X \le x] = \iint\limits_{n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \le x} \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2$$